Департамент образования Вологодской области

БПОУ ВО «Вологодский аграрно-экономический колледж»

Методические рекомендации по выполнению внеурочной самостоятельной работы студента по дисциплине

ЕН:01 Математика

по специальности 38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)

Форма обучения

очная форма обучения

Вологда 2020

Рассмотрено на заседании методической комиссии общеобразовательных и гуманитарных дисциплин Протокол № 1 от 31.08.2020 Председатель МК И. С. Вязанкина	Одобрено и рекомендовано для внутреннего использования научно-методическим Советом колледжа Протокол № 1 от 15.10.2020 Председатель НМС Е.В. Вихарева

Автор: Вязанкина И. С., преподаватель математики БПОУ ВО «Вологодский аграрно-экономический колледж»

Методические рекомендации предназначены для оказания помощи студентам, обучающимся на специальности 38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям), поступивших на базе среднего общего образования. В них включены тематика самостоятельной работы, рекомендации по их выполнению, формы контроля.

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Математика в соответствии с ФГОС по специальности 38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям) является естественно-научной дисциплиной.

Внеаудиторная самостоятельная работа является одним из видов учебных занятий студентов.

Основные цели самостоятельной работы:

- систематизация и закрепление знаний и практических умений студентов;
- углубление и расширение теоретических знаний, формирование умений использовать справочную документацию и дополнительную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности студентов, творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельного мышления;
- развитие исследовательских умений.

В начале учебного года (на первом занятии) преподаватель знакомит студентов со структурой построения всего курса дисциплины «Математика», в которую должна быть органично вписана самостоятельная работа. Каждый студент после такого занятия должен понимать, сколько самостоятельных работ ему предстоит выполнить в период изучения дисциплины и каким образом он будет отчитываться перед преподавателем. Можно составить таблицу, по которой студенту легко будет ориентироваться по темам курса, видам самостоятельных работ, срокам выполнения.

Рекомендуется ведение отдельной тетради для выполнения всех предусмотренных рабочей программой самостоятельных работ.

Любая самостоятельная работа дается на определенный срок (день, неделя,…). Если работа в срок не выполнена, то она оценивается меньшим количеством баллов.

При подборе индивидуальных заданий важно соблюдать дифференцированный подход.

Критериями оценки результатов самостоятельной работы студентов являются:

- уровень усвоения студентом учебного материала;
- умение студента использовать теоретические знания при выполнении практических задач;
- сформированность ключевых умений;
- обоснованность и четкость изложения материала;
- уровень оформления работы.

На самостоятельную работу в курсе изучения дисциплины отводится 24 часов. Методические рекомендации помогут студентам целенаправленно изучать материал по теме, определять свой уровень знаний и умений при выполнении самостоятельной работы.

ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

Тема	***Вид работы***	***Методы контроля***	***кол-во часов***
Дифференциальное исчисление	Составление таблицы производных Индивидуальная домашняя контрольная работа	Проверка работы	6
Интегральное исчисление	Составление таблицы интегралов Индивидуальная домашняя контрольная работа	проверка работы	6
Матрицы и определители	Индивидуальная домашняя контрольная работа	Проверка работы	4
Решение систем линейных уравнений	Работа с литературой, решение индивид. системы	Проверка работы	4
Линейное программирование	Составление презентации	Проверка работы	4
ИТОГО			***24***

ЗАДАНИЯ К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТОВ

Тема: Дифференциальное исчисление

Цель: закрепить навыки по вычислению производных функций первого и второго порядков, по исследованию функций с помощью производной.

Самостоятельная работа: индивидуальная домашняя работа
Форма контроля: проверка контрольной работы
Виды заданий:

1. Найти производные функций
2. Составить уравнение касательной к графику функции в заданной точке
3. Найти промежутки возрастания и убывания функции
4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке
5. Исследовать функцию и построить график

Пример выполнения работы:

Формулы дифференцирования.

Функция $f(x)$		Производная $f'(x)$.
1.	C	0
2.	x	1
3.	x^n	$n \cdot x^{n-1}$
4.	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
5.	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
6.	a^x	$a^x \cdot \ln a$
7.	e^x	e^x
8.	$\sin x$	$\cos x$
9.	$\cos x$	$-\sin x$

10.	$tg\, x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
11.	$ctg\, x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
12.	$log_a x$	$\frac{1}{x \ell n a}$
13.	$ln\, x$	$\frac{1}{x}$
14.	$arcsin\, x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15.	$arccos\, x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
16.	$arctg\, x$	$\frac{1}{1+x^2}$
17.	$arcctg\, x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Обозначения: C – постоянная; x – аргумент; u, v, w – функции от x, имеющие производные.

Основные правила дифференцирования

1. $(u + v - w)' = u' + v' - w'$
2. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$
3. $(C \cdot v)' = C \cdot v'$
4. $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
5. $(\frac{u}{c})' = \frac{1}{c} \cdot u'$

$$y' = (3^x - 2x^5 + e^2)' = (3^x)' - 2\cdot(x^5)' + (e^2)' = 3^x \ln 3 - 10x^4$$

2. $y = 2^x \cdot x^3$

$$y' = (2^x \cdot x^3)' = (2^x)' \cdot x^3 + 2^x \cdot (x^3)' = 2^x \cdot \ln 2 \cdot x^3 + 2^x \cdot 3x^2 = 2^x \cdot x^2(x \cdot \ln 2 + 3)$$

3. $y = \dfrac{x^2}{2 - x^2}$

$$y' = \left(\frac{x^2}{2-x^2}\right)' = \frac{(x^2)' \cdot (2-x^2) - x^2 \cdot (2-x^2)'}{(2-x^2)^2} = \frac{2x \cdot (2-x^2) - x^2 \cdot (-2x)}{(2-x^2)^2} =$$

$$= \frac{4x - 2x^3 + 2x^3}{(2-x^2)^2} = \frac{4x}{(2-x^2)^2}$$

4. $y = 3x^{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}} - x^{-2} + 4$

$$y' = (3x^{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}} - x^{-2} + 4)' = 3(x^{\frac{1}{3}})' + 2(x^{\frac{1}{2}})' - (x^{-2})' + (4)' =$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} + 2 \cdot \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} - (-2)\, x^{-2-1} = x^{\frac{-2}{3}} + x^{\frac{-1}{2}} + 2x^{-3}$$

5. $y = \dfrac{x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}}{x} + \dfrac{2}{\sqrt{x}} - 1 = x^{2+\frac{2}{3}-1} + 2x^{-\frac{1}{2}} - 1 = x^{1\frac{2}{3}} + 2x^{-\frac{1}{2}} - 1$

$$y' = (x^{1\frac{2}{3}} + 2x^{-\frac{1}{2}} - 1)' = \frac{5}{3} x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{-3}{2}}$$

4. Производная сложной функции.

Пусть дана сложная функция $y = g(u)$, где $u = f(x)$.

Если функция $u = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x, а функция $y= g(u)$ определена на множестве значений функции $f(x)$ и дифференцируема в точке $u = f(x)$, то сложная функция $y = g(f(x))$ в данной точке x имеет производную, которая находится по формуле

$$y_x' = g'(u)\cdot f'(x) \text{ или } y_x' = y_u'\cdot u'_x .$$

Например.

1. $y =(1 + x^2)^5$

$$y' =((1 + x^2)^5)' = 5 \cdot(1 + x^2)^4\cdot(1 + x^2)'= 10\, x\cdot(1 + x^2)^4$$

2. $y = sin^2 x$

$$y' = (sin^2 x)'= 2\, sinx\cdot(sinx)' = 2\, sinx \cdot cosx = sin2x$$

3. $y =(ln\, x)^2$

$$y' = ((ln\, x)^2)= 2\, ln\, x \cdot(ln\, x)' = \frac{2}{x}\cdot ln\, x$$

4. $y = x\, e^{x^2}$

$$y' = (x\, e^{x^2})'= (x)' \cdot e^{x^2} + x \cdot(e^{x^2})' = e^{x^2} + x\, e^{x^2} \cdot(x^2)' = e^{x^2} + x\, e^{x^2} \cdot 2x = e^{x^2} \cdot(1+ 2x^2)$$

5. $y = arccos\frac{x+2}{3}$

$$y' = (arccos\frac{x+2}{3})' = -\frac{\left(\frac{x+2}{3}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{x+2}{3}\right)^2}} = -\frac{1}{3\sqrt{\frac{9-x^2-4x-4}{9}}} = -\frac{1}{\sqrt{5-4x-x^2}} .$$

5. Вторая производная и производные высших порядков.

Производная второго порядка (вторая производная) от функции $y = f(x)$ есть производная от ее производной: $y'' = [f'(x)]'$.

Производная третьего порядка (третья производная) от функции $y = f(x)$ есть производная от ее второй производной: $y''' = [f''(x)]'$ и т.д.

Производная n-го порядка (n - ая производная) от функции $y = f(x)$ есть производная от ее $(n-1)$- й производной: $y^{(n)} = [f^{(n-1)}(x)]'$.

Пример. Найти третью производную от функции $y = x \cdot \ln 2x$ в точке

x = 2.

Решение. Дифференцируя данную функцию, получим:

$$y' = \ln 2x + x \cdot \frac{2}{2x} = \ln 2x + 1.$$

Дифференцируя производную y', найдем:

$$y'' = (y')' = \frac{1}{x}.$$

Таким образом, третья производная

$$y''' = (y'')' = -\frac{1}{x^2}.$$

При x = 2 имеем $y'''(2) = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4}$.

Приложение производной к исследованию функций.

Касательная и нормаль к плоской кривой. Скорость и ускорение.

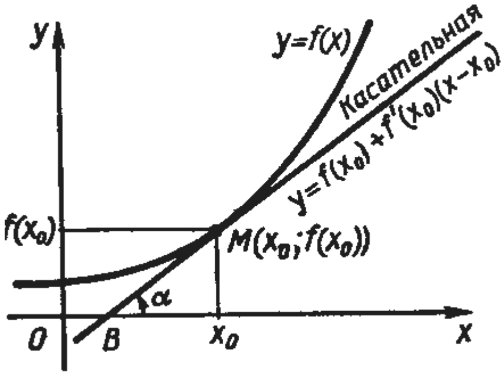
Касательная и нормаль к плоской кривой.

Геометрический смысл производной состоит в том, что значение производной функции в точке равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в этой точке. $k = f'(x0) = tg\alpha$ Уравнение касательной к графику функции

$y = f(x)$в точке $M(x0; f(x0))$ имеет вид

$y = f(x0) + f'(x0)(x - x0)$.

Прямая, перпендикулярная касательной в точке касания $M(x0; f(x0))$, называется *нормалью* к кривой.



3) Найдем значение производной функции в заданной точке

$$F'(x_0) = f'(2) = 2\cdot 2 - 2 = 2.$$

4) Подставив найденные значения $f(x_0)$ и $f'(x_0)$ в формулу

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, получим искомое уравнение касательной

$y = 3 + 2(x - 2) = 3 + 2x - 4 = 2x - 1$

$y = 2x - 1$ или $2x - y - 1 = 0.$

2. Написать уравнение нормали к кривой $f(x) = x^3$ в точке $M(2;8)$.

Решение:

1) Имеем абсциссу $x_0 = 2$, а $f(x_0) = 8$.

2) Найдем производную функции $f'(x) = (x^3)' = 3x^2$.

3) Найдем значение производной функции в заданной точке

$f'(x_0) = f'(2) = 3\cdot 2^2 = 12.$

4) Подставив значения $f(x_0)$ и $f'(x_0)$ в формулу $y = f(x_0) - \dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$,

получим искомое уравнение нормали

$$y = 8 - \frac{1}{12}(x - 2) \text{ или } x + 12y - 98 = 0.$$

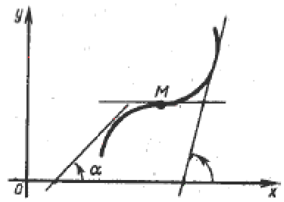
3. Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к кривой $y = x^3$ в

Возрастание и убывание функции. Экстремум функции. Наибольшее и наименьшее значения функции.

Возрастание и убывание функции.

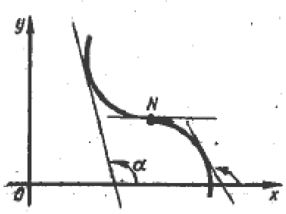
Интервалы, на которых функция только возрастает или же только убывает, называются *интервалами монотонности* функции, а сама функция называется *монотонной* на этих интервалах.

Касательные к графику возрастающей функции образуют острые углы α с положительным направлением оси OX. Касательная может быть параллельной оси OX, значит $f'(x) = tg\alpha \geq 0$.

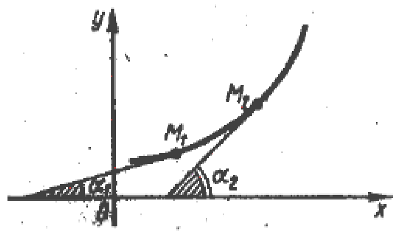


Касательные к графику убывающей функции образуют тупые углы α с положительным направлением оси OX. Касательная может быть параллельной оси OX, значит

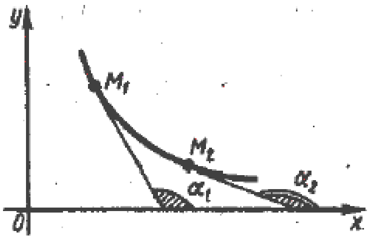
$f'(x) = tg\alpha \leq 0$.



Если производная функции $y = f(x)$ положительна (отрицательна) в некотором интервале, то функция в этом интервале монотонно возрастает (монотонно убывает).



Если $f'(x)>0$, то $tg\alpha > 0$, т.е. угол α – острый, а это возможно, лишь при возрастании функции.



Если $f'(x)<0$, то $tg\alpha < 0$, т.е. угол α – тупой, а это возможно, лишь при убывании функции.

Возрастание или убывание функции на интервале определяется знаком производной этой функции.

Точки, в которых производная обращается в нуль, называются ***критическими точками*** функции.

8.2. Экстремум функции.

1. Максимум.

8.3. Наибольшее и наименьшее значения функции.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;в]$. Тогда она принимает как наибольшее, так и наименьшее значения на этом отрезке.

Функция $y = f(x)$ имеет максимум при $x = a$, если при всех x, достаточно близких к a, выполняется неравенство $f(a) > f(x)$.

Признаки максимума:

1. $f'(a) = 0;$
2. $f'(x)$ при переходе аргумента через $x = a$ меняет знак с " + " на " – " (с возрастания на убывание).

2. Минимум.

Функция $y = f(x)$ имеет минимум при $x = a$, если при всех x, достаточно близких к a, выполняется неравенство $f(a) < f(x)$.

Признаки минимума:

1. $f'(a) = 0;$
2. $f'(x)$ при переходе аргумента через $x = a$ меняет знак с " – " на " + " (с убывания на возрастание).

При решении этой задачи возможны два случая:

1) либо наибольшее (наименьшее) значение функции достигается внутри отрезка и тогда эти значения окажутся в числе экстремумов функции;

2) либо наибольшее (наименьшее) значение функции достигается на концах отрезка [*а;в*].

Правило нахождения наибольшего и наименьшего значения непрерывной на отрезке [а;в] функции:

1. Найти все критические точки, принадлежащие промежутку [*а;в*], и вычислить значения функции в этих точках.

2. Вычислить значения функции на концах отрезка [*а;в*], т.е. найти $f(a)$ и $f(в)$.

3. Сравнить полученные результаты; наибольшее из найденных значений является наибольшим значением функции на отрезке [*а;в*]; аналогично, наименьшее из найденных значений есть наименьшее значение функции на этом отрезке.

Например. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 3$ на отрезке $[-1;2]$.

Решение:

1. Находим критические точки, принадлежащие интервалу (- 1; 2) и значения функции в этих точках:

$y' = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2$; $5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 0$; $5x^2(x^2 - 4x + 3) = 0$;

$x^1 = 0,\ x^2 = 1,\ x^3 = 3$.

Критическая точка $x^3 = 3$ не принадлежит заданному отрезку.

2. Вычисляем значения функции в двух других критических точках:

$y(0) = 3,\ y(1) = 4$.

3. Вычислим значения функции на концах заданного отрезка:

$y(-1) = -8,\ y(2) = -5$.

4. Сравнивая полученные результаты, делаем вывод, что

$$\max_{[-1,2]} y = y(1) = 4, \quad \min_{[-1,2]} y = y(-1) = -8.$$

10. Исследование функций и построение их графиков.

Схема исследования функции и построения её графика:

1) найти область определения функции и определить точки разрыва, если они имеются;

2) исследовать функцию на четность и нечетность;

3) исследовать функцию на периодичность;

4) определить точки пересечения с осями координат, если это возможно;

5) найти критические точки функции;

6) определить промежутки монотонности и экстремумы функции;

7) определить промежутки вогнутости и выпуклости кривой и найти точки перегиба;

8) найти асимптоты графика функции;

9) используя результаты исследования, соединить полученные точки плавной кривой; иногда для большей точности графика находят несколько дополнительных точек; их координаты вычисляют, пользуясь уравнением кривой.

Например. Исследовать функцию $y = x^3 – 6x^2 + 9x - 3$ и построить еѐ график.

Решение:

1) функция определена на всей числовой прямой, т.е. D(y) = R;

2) $y(-x) = (-x)^3- 6(-x)^2 + 9(-x) – 3= - x^3- 6x^2- 9x – 3,$ функция не является ни четной, ни нечетной;

3) функция не является периодической;

4) найдем точку пересечения графика с осью OY: полагая $x = 0,$ получим

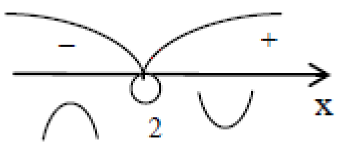
$y = - 3;$ точки пересечения графика с осью OX в данном случае найти затруднительно.

5) найдем производную $f'(x)= 3x^2- 12x + 9;$ найдем критические точки $f'(x)=0,\ 3x^2- 12x + 9= 0,$ получим $x = 1$ и $x = 3$ – критические точки.

6) в промежутках (-∞; 1) и (3; +∞) $y' >0,$ функция возрастает; в

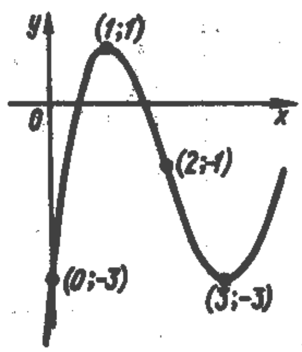
промежутке (1; 3) $y' <0,$ функция убывает. При переходе через точку $x = 1$ производная меняет знак с плюса на минус, а при переходе через точку $x = 3$ – с минуса на плюс. Значит $y_{max} = y(1)= 1,\ y_{min} = y(3) = - 3.$

7) найдем вторую производную $y''= 6x – 12,\ y''=0,\ 6x – 12= 0,\ x = 2;$
в промежутке (-∞; 2) $y'' <0,$ кривая выпукла вверх,
в промежутке (2; +∞) $y'' >0,$ кривая выпукла вниз.



Получаем точку перегиба (2;-1). 8) график функции асимптот не имеет;

9) используя полученные данные, строим искомый график.



Индивидуальная контрольная работа

1. Найти производную функции:

1.	$f(x) = 3x\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt[4]{x^5}}{\sqrt[5]{x^2}}$	10.	$f(x) = \frac{e^x \cos x}{1 + \ln x}$
2.	$f(x) = 5\arcsin x + \frac{2}{3}\sqrt[2]{x^3}$	11.	$f(x) = \left(\sqrt[3]{x^5} + \log_2 x\right)\left(e^x - 2\sqrt{x}\right)$
3.	$f(x) = 8x^4 \cdot \ln x$	12.	$f(x) = \frac{7^x - 3x}{\sin x}$
4.	$f(x) = (3x^2+1)(2\sqrt{x} - \sqrt[3]{x})$	13.	$f(x) = \sqrt{x}\cos x - \frac{1}{x}tgx$
5.	$f(x) = x^{-2}\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x}$	14.	$f(x) = 4 \cdot 3^x - 6 \cdot x \cdot \log_9 x$
6.	$f(x) = \frac{x^2 - \ln x + x}{x^3 + 8x}$	15.	$f(x) = \frac{5^x - 1}{5^x + 2}$
7.	$f(t) = \frac{\sqrt{t^3}\sqrt[3]{t^2}}{t\sqrt{t}}$	16.	$f(x) = 6\sqrt[4]{x^3} - 3\log_9 x$
8.	$f(x) = (\sin x + \frac{1}{3}\cos x) \cdot \sqrt[3]{x}$	17.	$f(x) = \frac{3x^3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{2x^2}{\sqrt{x}} - \frac{3x}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{4}{x\sqrt{x}}$
9.	$f(x) = 5x^2\sqrt{x} + 8\sin x$	18.	$f(x) = \frac{\ln x + 4x^2}{e^x}$

2. Найти производную сложной функции:

1.	$f(x) = e^{-x}\ln tgx$	10.	$f(x) = tg^2\left(\frac{\pi}{8} - \sqrt{x}\right)$
2.	$f(x) = \ln\frac{5x-3}{2x+7}$	11.	$f(x) = \sqrt{\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)}$
3.	$f(x) = \frac{1}{2}\sin arcctg6x$	12.	$f(x) = \cos\ln(2x - x^2)$
4.	$f(x) = \frac{x}{\sqrt{3-x^2}} - \log_4 e^x$	13.	$f(x) = \ln^2 \ln x$
5.	$f(x) = \frac{\ln\cos x}{\ln\sin x}$	14.	$f(x) = 3^{2x} ctg \ln x$

6.	$f(x) = 2^{tgx^2} + \frac{2}{5}\pi^2$	15.	$f(x) = 2\sqrt[4]{\arcsin^3 x^2}$
7.	$f(x) = ln\left(\frac{1}{2}x^4 + \sqrt{4+2x^2}\right)$	16.	$f(x) = 10^{2x-x^3} + tg(\ln 2x)$
8.	$f(x) = x^2 \cdot arctg2x + ln\sqrt{x}$	17.	$f(x) = \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}$ - $\frac{1}{2}arctgx$
9.	$f(x) = \frac{\ln(2x^2-1)}{\sqrt[3]{(5-x)^2}}$	18.	$f(x) = 4^{ctg^2 x} + \frac{2}{3}\pi^2\sqrt{x}$

3. Найти производную функции в заданной точке:

1. $f(t) = \sqrt[3]{2t-t^2}$, *найти* $f'(4)$	2. $f(x) = \sqrt{x+2\sqrt{x}}$, *найти* $f'(1)$
3. $f(t) = \frac{1-t}{2t}$, *найти* $f''(0,5)$	4. $f(x) = ln\frac{x}{1-x^4}$, *найти* $f'(2)$
5. $f(x) = 3ctg\, x + ctg^3 x$, *найти* $f'(\frac{\pi}{3})$	6. $f(x) = x\, e^{x^2}$, *найти* $f'(0)$
7. $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$, *найти* $f''(2)$	8. $f(x) = e^{\sin^2 2x}$, *найти* $f'(\frac{\pi}{8})$
9. $f(t) = ln\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, *найти* $f'(2)$	10. $f(x) = x\, lnx - x$, *найти* $f'(e^3)$
11. $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$, *найти* $f'(0)$	12. $f(x) = tg^2 x - ctg^2 x$, *найти* $f'(\frac{\pi}{4})$
13. $f(x) = cos^2\frac{x}{6}$, *найти* $f'(\pi)$	14. $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+4}$, *найти* $f''(-1)$
15. $f(x) = \frac{e^{x^2}}{e^x + 2^{1-x}}$, *найти* $f'(0)$	16. $f(x) = \frac{1}{2}\cos^2 x - \ln\cos x$, *найти* $f'(\frac{\pi}{4})$
17. $f(x) = \frac{\cos^2 x - 4x}{2\sin x}$, *найти* $f'(\frac{\pi}{4})$	18. $f(t) = \frac{t}{e^t}$, *найти* $f'(0)$

4. Прямолинейное движение точки описывается законом S(t). Найдите скорость и ускорение в момент времени t.

1.	$S(t) = 0{,}6t^5 + \frac{1}{3}t^3 + t - 10$	$t = 2$	6.	$S(t) = -3t - 0{,}9 + 5t^2 + 11\frac{t^3}{3}$	$t = 2$
2.	$S(t) = 5\sqrt{7} + 3t + 5t^2 + \frac{t^3}{3}$	$t = 5$	7.	$S(t) = \frac{2}{3}t^3 + 2t^2 + 3t$	$t = 4$
3.	$S(t) = 2t^3 + 6t + \frac{1}{2}t^4 + 0{,}8$	$t = 3$	8.	$S(t) = \frac{3}{4}t^4 + \frac{5}{4}t^8 + 5\frac{t^3}{3}$	$t = 1$

4.	$S(t) = 0{,}2\,t^5 + 3\,t^3 - 51 - t$	$t = 2$	9.	$S(t) = 3\frac{t^2}{2} + 0{,}4\,t^5 - 2t + 4\frac{t^3}{3}$	$t = 2$
5.	$S(t) = 12\frac{t^5}{5} - 8\sqrt{3} + 3\frac{1}{2}t^4$	$t = 1$	10.	$S(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 2\,t^2 + 5\,t + \frac{1}{5}$	$t = 3$

5. Написать уравнение касательной к графику функции f (x) в точке с абсциссой x0.

№	f (x)	x_0	№	f (x)	x_0
1.	$f(x) = 4x^4 - 6x + 1$	$x_0 = -1$	6.	$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 2$	$x_0 = -3$
2.	$f(x) = -3x^2 - 6x - 1$	$x_0 = 3$	7.	$f(x) = -6x + \frac{5}{4}x^2 + 10$	$x_0 = -2$
3.	$f(x) = 2x^4 + x^3 - 4x$	$x_0 = 2$	8.	$f(x) = 2 + \cos x - \sin x$	$x_0 = \frac{\pi}{2}$
4.	$f(x) = 3x^3 + 12x + 7$	$x_0 = 1$	9.	$f(x) = 9 + 8x^2 - \frac{1}{3}x^3$	$x_0 = 1$
5.	$f(x) = 4x^2 - 2x^3 - 2x$	$x_0 = 2$	10.	$f(x) = 5x^3 - 4x^2 - 1$	$x_0 = -1$

6. Найдите промежутки монотонности и точки экстремума функции:

1.	$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 8\sqrt{3}$	6.	$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$
2.	$f(x) = -2x^2 + \frac{x^4}{4} - \frac{9}{4}$	7.	$f(x) = (x-1)^3 - 3(x-1)$
3.	$f(x) = \frac{4x^3 - x^4}{9}$	8.	$f(x) = 3x^5 - 5x^3 - 30x$
4.	$f(x) = (x+1)^3 - 27(x+1)$	9.	$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 8x^2 - 6$
5.	$f(x) = 2x - \frac{1}{6}x^3 + 2\sqrt{2}$	10.	$f(x) = 0{,}8x^5 - x^4 + 4x^3$

7. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке:

№	f (x)	[a;b]	№	f (x)	[a;b]
1.	$f(x) = -3x^4 + 6x^2 - 1$	[- 2; 2]	6.	$f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$	[- 1; 2]

2.	$f(x) = x^4 - 4x^3 - 3$	[- 1; 5]	7.	$f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 2$	[- 1; 1]
3.	$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4$	[- 1; 4]	8.	$f(x) = x^4 - 8x^2 + 8$	[- 1; 1]
4.	$f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$	[- 1; 3]	9.	$f(x) = 2x^4 - 8x + \frac{1}{2}$	[- 2; 1]
5.	$f(x) = \frac{1}{2}x^4 + x^3 - x^2 + 2$	[- 3; 1]	10.	$f(x) = 5 + 12x - x^3$	[- 3; 0]

8. Исследовать на выпуклость, вогнутость и точки перегиба функции:

1.	$f(x) = 4x^4 - \frac{16}{3}x^3$	6.	$f(x) = x^3 - 3x - 5$
2.	$f(x) = 3x^2 - x^3$	7.	$f(x) = x^4 - 4x^3$
3.	$f(x) = x^3 - 9x$	8.	$f(x) = 6x - 2x^3$
4.	$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 2x - 1\frac{1}{3}$	9.	$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2$
5.	$f(x) = x^3 + 3x^2 + 4$	10.	$f(x) = -x^2 + \frac{1}{2}x^4$

9. Исследуйте функции и постройте их графики:

1.	$f(x) = 2x^4 - x^2 + 1$	6.	$f(x) = 4x^2 - 2x^4$
2.	$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2$	7.	$f(x) = -x^2(x^2 - 4)$
3.	$f(x) = -\frac{t^4}{4} + x^2$	8.	$f(x) = 2x^3 - 6x^2$
4.	$f(x) = \frac{t^3}{3} + 3x^2$	9.	$f(x) = -4x^3 + 12x$
5.	$f(x) = x^3 - 6x$	10.	$f(x) = x^4 - 8x^2 + 8$

Используемая литература:

1. Баврин, И. И. Математика: учебник и практикум для среднего профессионального образования / И. И. Баврин. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 616 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-04101-9. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://biblio-online.ru/bcode/426511.
2. Дадаян, А. А. Математика : учебник / А.А. Дадаян. — 3-е изд., испр. и доп. — Москва : ИНФРА-М, 2020. — 544 с. — (Среднее профессиональное образование). - ISBN 978-5-16-012592-3. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1097484

Тема: <u>Интегральное исчисление</u>

Цель: закрепить навыки по вычислению интегралов различными способами.

Самостоятельная работа: индивидуальная домашняя работа
Форма контроля: проверка работы
Виды заданий:

1. Вычислить неопределенный интеграл
2. Вычислить определенный интеграл
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями
4. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси.

Пример выполнения работы:

1. Первообразная функция и неопределенный интеграл

Пусть y = F(x) имеет производную $y' = f(x)$, тогда ее дифференциал
$dy = f(x)\,dx$

Функция F(x) по отношению к ее дифференциалу $f(x)\,dx$ называется **первообразной.**

Определение: Функция F(x) называется **первообразной** для функции $f(x)$ на заданном промежутке, если для всех *x* из этого промежутка $F'(x) = f(x)$. Дифференциалу функции соответствует не единственная первообразная, а множество их, причем они отличаются друг от друга постоянным слагаемым.

Пусть F(x) - первообразная для дифференциала $f(x)\,dx$.

Тогда:

$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x)$, где C - постоянная.

Определение: совокупность всех первообразных функций F(x) + C для дифференциала *f (x) dx.* называется **неопределенным интегралом** и обозначается $\int f(x)dx$.

Таким образом,

$\int f(x)dx$ = F(x) + C,

Где *f(x) dx.* называется подынтегральным выражением, а C – произвольной постоянной интегрирования.

Например: $\int 2xdx = x^2 + C$, так как $(x^2 + C)' = 2x$.

Процесс нахождения первообразной функции называется **интегрированием**.

Интегрирование – это действие, обратное дифференцированию.

1.1 Свойства неопределенного интеграла

1) $d\int f(x)dx = f(x)\,dx,$

т.е. дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению.

2) $\int dF(x) = F(x) + C,$

т.е. неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции, сложенной с произвольной постоянной.

3) $\int a\cdot f(x)dx = a\cdot\int f(x)dx$, где a = const, т.е. постоянную величину можно вынести за знак интеграла.

4) $\int[f_1(x)+f_2(x)-f_3(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx - \int f_3(x)dx,$

т.е. интеграл суммы или разности функций равен сумме или разности интегралов.

1.2 Формулы интегрирования

Справедливость каждой формулы проверяется дифференцированием.

1. $\int dx = x + c$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,\ n \neq -1$
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$
4. $\int \frac{dx}{x} = \ell n|x| + c$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ell na} + c$
6. $\int e^x dx = e^x + c$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + c$
8. $\int \cos x dx = \sin x + c$
9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$
10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$
11. $\int tgx dx = -\ell n|\cos x| + c$
12. $\int ctgx dx = \ell n|\sin x| + c$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$
14. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + c$
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c$
16. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\cdot arctg\frac{x}{a} + c$
17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ell n\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + c$
18. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\cdot\ell n\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$
19. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ell n\left|tg\frac{x}{2}\right| + c$
20. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ell n\left|tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right| + c$

1.4 Непосредственное интегрирование.

При непосредственном интегрировании следует пользоваться таблицей интегралов. Интегрируя функции, содержащие переменную в знаменателе дроби или под знаком радикала, нужно вводить степень с отрицательным или дробным показателем, привести подынтегральное выражение к виду какого-либо табличного интеграла.

При интегрировании произведения в ряде случаев полезно предварительно раскрыть скобки.

Примеры:

1. $$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int x^2 \cdot x^{-\frac{2}{3}}dx = \int x^{\frac{4}{3}}dx = \frac{x^{\frac{4}{3}+1}}{\frac{4}{3}+1} + c = \frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}} + c = \frac{3}{7}x^2\sqrt[3]{x} + c$$

2. $$\int (x+3)(x-2)dx = \int (x^2 + x - 6)dx = \int x^2dx + \int xdx - 6\int dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + c$$

1.5 Интегрирование методом подстановки.

Если интеграл затруднительно привести к табличному с помощью элементарных преобразований, то в этом случае пользуются методом подстановки (методом замены переменной интегрирования).

Сущность этого метода заключается в том, что путем введения новой переменной удается свести данный интеграл к новому интегралу, который сравнительно легко берется непосредственно.

Для интегрирования методом подстановки можно использовать следующую схему:

1) часть подынтегральной функции надо заменить новой переменной;

2) найти дифференциал от обеих частей замены;

3) все подынтегральное выражение выразить через новую переменную (после чего должен получиться табличный интеграл);

4) найти полученный табличный интеграл;

5) сделать обратную замену.

Примеры:

1. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(5-3x)^2}}$.

Решение. Произведем подстановку $5 - 3x = t$, тогда $-3xdx = dt$, откуда $dx = -\frac{1}{3}dt$. Далее получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(5-3x)^2}} = \int \frac{-\frac{1}{3}dt}{\sqrt[3]{t^2}} = -\frac{1}{3}\int t^{-\frac{2}{3}}dt = -\frac{1}{3}\frac{t^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + c = -\sqrt[3]{t} + c = -\sqrt[3]{5-3x} + c$$

2. Найти интеграл $\int (2+\cos x)^2 \sin x dx$.

Решение. Сначала положим $2 + \cos x = t$, тогда $-\sin x dx = dt$, откуда $\sin x dx = -dt$. Далее получаем

$$\int (2+\cos x)^2 \sin x dx = \int t^2(-dt) = -\int t^2 dt = -\frac{t^3}{3} + c = -\frac{1}{3}(2+\cos x)^3 + c.$$

1.6 Интегрирование по частям

Пусть u и v - дифференцируемые функции от x. Тогда

$$d(u \cdot v) = udv + vdu,$$

откуда следует

$$udv = d(u \cdot v) - vdu..$$

Проинтегрируем обе части этого равенства

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu.$$

Так как $\int d(uv) = uv$, то получаем $\int udv = uv - \int vdu$.

Эта формула часто применяется, когда подынтегральной функцией является:

- логарифмическая или обратная тригонометрическая функция;
- произведение каждой из этих функций на алгебраическую;
- произведение, содержащее алгебраические, тригонометрические, показательные функции и др.

Для интегралов вида $\int \ell nx dx, \int arctgx dx, \int \arcsin x dx$ за u принимается подынтегральная функция, а $dv = dx$.

1. Найти интеграл $\int \ell nx dx$.

Пусть $u = \ell nx$, тогда $dv = dx$, $du = \frac{dx}{x}$, $v = x$.. Поэтому

$$\int \ell nx dx = x\ell nx - \int x\frac{dx}{x} = x\ell nx - \int dx = x\ell nx - x + c.$$

2. Найдем $\int \arcsin x dx$.

Полагаем $u = \arcsin x$, а $dv = dx$, тогда $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ и $v = x$

Поэтому $\int \arcsin x dx = x \arcsin x - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$.

К вновь записанному интегралу применяется подстановка $1 - x^2 = z$, которая дает $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}$. Поэтому можно записать

$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c.$$

2. Определенный интеграл

Приращение $F(b) - F(a)$ любой из первообразных функций $F(x) + C$ при изменении аргумента от $x = a$ до $x = b$ называется определенным интегралом, и обозначается: $\int_a^b f(x)dx$.

2.1 Свойства определенного интеграла

1. $\int\limits_a^b C\cdot f(x)dx = C\int\limits_a^b f(x)dx$, где C - постоянная

2. $\int\limits_a^b [f_1(x)+f_2(x)-f_3(x)]dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx + \int\limits_a^b f_2(x)dx - \int\limits_a^b f_3(x)dx$

3. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$

Пример 1. Вычислить интеграл методом непосредственного интегрирования:

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\sin x\right)dx = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2 x} - \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sin x dx = tgx\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} + \cos x\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= tg\frac{\pi}{4} - tg\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \cos\frac{\pi}{4} - \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1-(-1)+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2} = 2$$

3. Приложения определенного интеграла

Вычисление площадей

Фигура, ограниченная кривой $y = f(x)$, осью абсцисс и двумя прямыми, перпендикулярными к оси абсцисс, называется *криволинейной трапецией*. Отрезок [a;b] называется основанием криволинейной трапеции. Различные

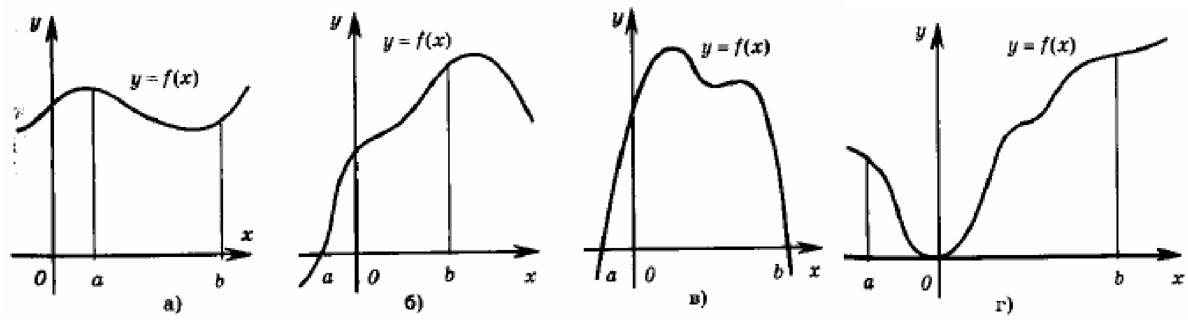
$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$$

Например $$\int\limits_{-1}^{1}(x^2+1)dx = \left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Big|_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{3}+1\right)-\left(-\frac{1}{3}-1\right) = 2\frac{2}{3}$$

примеры криволинейных трапеций приведены на рисунках *а – г.*

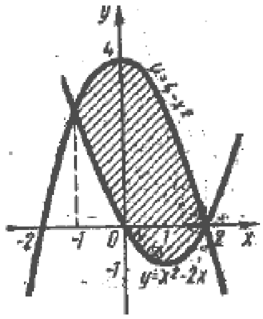
Площадь фигуры, ограниченной кривой $y = f(x)$, где $f(x) > 0$, осью OX и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$, выражается определенным интегралом:

$$S = \int\limits_a^b f(x)dx$$



Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами $y = 4 - x^2$ и $y = x^2 - 2x$.

Решение:



Найдем пределы интегрирования, т.е. абсциссы точек пересечения графиков функций $y = 4 - x^2$ и $y = x^2 - 2x$. Для этого решим систему $\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = x^2 - 2x \end{cases}$

Имеем $4 - x^2 = x^2 - 2x,\ 2x^2 - 2x - 4 = 0$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}, \quad x_1 = -1,\ x_2 = 2$$

Искомую площадь вычисляем по формуле $S = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx$

$$S = \int_{-1}^{2} (4 - x^2 - x^2 + 2x)dx = \int_{-1}^{2} (4 - 2x^2 + 2x)dx = 4\int_{-1}^{2} dx - 2\int_{-1}^{2} x^2 dx + 2\int_{-1}^{2} xdx =$$

$$= 4x\Big|_{-1}^{2} - 2\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} + 2\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{2} = 4(2+1) - \frac{2}{3}(8+1) + 4 - 1 = 12 - 6 + 3 = 9$$

S = 9 кв.ед.

Индивидуальная контрольная работа

1. Найдите неопределенные интегралы:

1. $\int (4x^2 + 4x - 3)dx$
2. $\int \frac{\sqrt[3]{x} - 3}{\sqrt{x}}dx$
3. $\int \frac{t^2 dt}{\sqrt[5]{5 - 2t^3}}$
4. $\int \frac{1 - 6x + 4x^2}{x^2}dx$
5. $\int 3^{2+x^2} xdx$
6. $\int \frac{5 - \sqrt[3]{x^2}}{x}dx$
7. $\int x \cdot 2^{x^2} dx$

11. $\int \frac{\ldots}{x\sqrt[3]{x^2}}dx$

16. $\int \frac{xdx}{2\sqrt{x}}$
17. $\int (3x^5 - \cos x - 1)dx$
18. $\int \left(\frac{2}{\cos^2 x} - \frac{5}{\sin^2 x}\right)dx$
19. $\int (2^x - 3e^x + x)dx$
20. $\int \frac{x^{-\frac{1}{2}} + 2}{\sqrt{x}}dx$
21. $\int \left(\frac{1}{5\cos^2 x} - \frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right)dx$
22. $\int \frac{3x^2 dx}{(2 - x^3)^4}$

2… $\int \frac{\ldots}{\cos^2 x}dx$

12. $\int \frac{x\sqrt{x} - x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}}dx$

13. $\int \left(9x^8 - 3e^x + \frac{5}{\cos^2 x}\right)dx$

14. $\int (3x^3 - 4)^2 x^2 dx$

15. $\int \frac{x^2 dx}{1 + x^3}$

27. $\int \cos^4 x \sin x dx$

28. $\int \frac{7 + 2x\sin^2 x}{\sin^2 x}dx$

29. $\int \frac{\sin 2x dx}{\cos x}$

30. $\int \frac{dx}{\sqrt{(3x+1)^3}}$

2. Найдите определенные интегралы:

1. $\int_1^8 \left(4x - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2}\cos x dx$

3. $\int_0^2 \frac{4x dx}{\sqrt{1 + 2x^2}}$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{(2 - \cos x)^2}$

5. $\int_0^8 \left(\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}\right)dx$

16. $\int_6^{6\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 + 36}$

17. $\int_0^2 (2 - x)^2 dx$

18. $\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{x^4 + 16} \cdot x^3 dx$

19. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{2\cos^2 x}$

20. $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{dx}{\sqrt{4 - 9x^2}}$

6. $\int_0^1 x^2 e^{x^3+1} dx$

7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \sin x)dx$

8. $\int_0^4 \left(1 - \sqrt{x}\right)^2 dx$

9. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 - 2\sin x)^3 \cos x dx$

10. $\int_1^2 \frac{1 - x^6}{x^5}dx$

11. $\int_1^8 \left(3 - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$

21. $\int_0^4 \left(x^2 - 2\sqrt{x}\right)dx$

22. $\int_{-\frac{2}{3}}^0 (4 + 6x)^3 dx$

23. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$

24. $\int_0^1 \left(5 - 2x^3\right)x^2 dx$

25. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 + 5\sin x}\cos x dx$

26. $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt[4]{(1 + 15x^2)^3}}$

12. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{(8-7\sin x)^2}}$

13. $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{7x^3+1}}$

14. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)dx$

15. $\int_0^1 \frac{6x^2 dx}{1+2x^3}$

27. $\int_1^3 2e^{2x}dx$

28. $\int_1^9 \left(2x-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx$

29. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{\cos x}\sin x dx$

30. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{2\sqrt{1+x^2}}$

3. Сделайте чертеж и вычислите площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

1) $y = 3x - 1,\ y = 0,\ x = 2,\ x = 4$
2) $x - 2y + 4 = 0,\ x + y - 5 = 0,\ y = 0$
3) $y = -\frac{1}{3}x^2 + 3,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 3$
4) $y = 9 - x^2,\ y = 0$
5) $y = 4x - x^2,\ y = 0$
6) $y = x^2 - 2x + 3,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 3$
7) $y = x^2,\ 5x - y - 6 = 0$
8) $y = x^2,\ x = y^2$
9) $y = \frac{1}{4}x^2,\ y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$
10) $y = -x^2 + 6,\ y = 2x + 3$

4. Сделайте чертеж и вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной данными линиями:

1) $y^2 = 6x,\ y = 0,\ x = 1,\ x = 3$
2) $y^2 = 4(x - 2),\ y = 0,\ x = 3,\ x = 6$
3) $y = x^2 - 4,\ x = 0$
4) $y = \sin x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = \pi$
5) $y^2 = 4x,\ y = x$
6) $y = 4 - x^2,\ x - y + 2 = 0$

5. Сделайте чертеж и вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси *OY* фигуры, ограниченной данными линиями:

1) $y = x^2, y = 1, y = 4, x = 0$
2) $y = x^2 + 1, y = 5$
3) $y^2 = 9x, y = 3x$
4) $y^2 = 2x, 2x + 2y - 3 = 0$

Используемая литература:

1.Баврин, И. И. Математика: учебник и практикум для среднего профессионального образования / И. И. Баврин. — 2-е изд., перераб. И доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 616 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-04101-9. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://biblio-online.ru/bcode/426511.
2.Дадаян, А. А. Математика : учебник / А.А. Дадаян. — 3-е изд., испр. и доп. — Москва : ИНФРА-М, 2020. — 544 с. — (Среднее профессиональное образование). - ISBN 978-5-16-012592-3. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1097484

Тема: Вычисление определителей

Цель: закрепить навыки по вычислению определителей второго, третьего и высших порядков.

Самостоятельная работа: индивидуальная домашняя работа
Форма контроля: проверка работы
Виды заданий:
1. Вычислить определитель второго порядка
2. Вычислить определитель третьего порядка
3. Вычислить определитель высших порядков
4. Выполнить проверку с помощью программы MS Excel

Пример выполнения работы:

1. Вычислить определитель второго порядка

Определителем второго порядка называется число, которое поставлено в соответствие таблицы коэффициентов $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

по следующему правилу: произведение по главной диагонали берется со знаком плюс, по другой диагонали со знаком минус.

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$

Пример: вычислить определитель второго порядка

1) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 4 = 4 - 12 = -8$

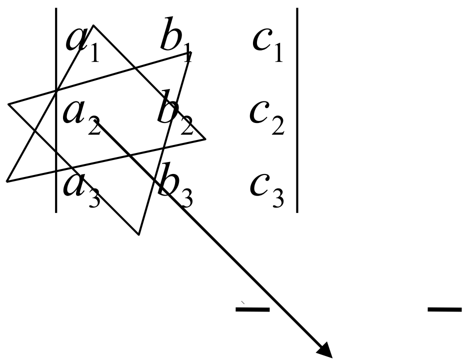
2) $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) = -1 + 6 = 5$

2. Вычислить определитель третьего порядка

Определителем третьего порядка называется число, которое поставлено в соответствие таблицы коэффициентов по следующему правилу:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1calignl3$$

Это определение определителя наглядно можно представить следующим образом:



$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Это правила называют еще «Правило треугольника»

<u>Пример:</u> Вычислить определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 5 - 1 \cdot 4 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 \cdot 5 == 36 + 4 + 10 - 4 - 12 - 30 = 4$$

3. Вычислить определитель высшего порядка

В общем виде определитель n-го порядка может быть представлен следующем виде:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ . & . & . & a_{\text{ij}} & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{\text{nn}} \end{vmatrix}$$

где a_{ij} – элемент определителя, i – номер строки, j – номер столбца.

Возьмем a_{ij} в определителе и вычеркнем i строку, j столбец. В результате останется определитель порядка на единицу ниже. Такой определитель называется **минором элемента a_{ij}**. Обозначается минор – M_{ij}.

<u>Пример:</u> Найти минор элемента a_{12} определителя $D =$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ . & . & . & a_{\text{ij}} & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{\text{nn}} \end{vmatrix}$$

Для этого вычеркнем первую строку, второй столбец.

$$D=\begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & a_{13} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n}\\ . & . & . & a_{\text{ij}} & .\\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{\text{nn}} \end{vmatrix}$$

В результате останется определитель порядка на единицу ниже и минор равен:

$$\mathrm{M}_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n}\\ a_{31} & a_{33} & \dots & a_{3n}.\\ . & . & . & \end{vmatrix} \;\left|a_{n1}\right| \;\left|a_{n3}\right| \;\left|\dots\right| \;\left|a_{\text{nn}}\right| \;\Big|$$

Алгебраическим дополнением элемента определителя называется его минор взятый со своим знаком, если сумма номеров строки и столбца, в которой расположен элемент, четная и с обратным знаком, если нечетная.

$\mathrm{A}_{\text{ij}} =$ - алгебраическое дополнение

<u>**ТЕОРЕМА:**</u> Определитель n-го порядка равен сумме произведений какой либо строки (или столбца) на их алгебраические дополнения.

$$D=\sum_{j=1}^{n} a_{\text{ij}}A_{\text{ij}}$$

<u>Пример:</u> Вычислить определитель четвертого порядка $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

По теореме определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки на их алгебраические дополнения. Найдем алгебраические дополнения элементов первой строки и разложим определитель по первой строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}+a_{14}A_{14}=$$

Варианты заданий:

Вариант	Задание
1	1) а) D = $\begin{vmatrix} -7{,}2 & 3\\ 8{,}1 & 4 \end{vmatrix}$; б) D = $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -3\\ 8 & -2 & -1\\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$; в) D = $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & 3\\ 0 & -2 & 4 & 1\\ 2 & 3 & -1 & -2\\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$
2	1) а) D = $\begin{vmatrix} -4 & 3.9\\ 7 & 6.2 \end{vmatrix}$; б) D = $\begin{vmatrix} -4 & 1 & -3\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$; в) D = $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -3\\ 2 & 0 & 3 & 4\\ 3 & 1 & -2 & 0\\ 4 & -2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$
3	1) а) D = $\begin{vmatrix} -7{,}8 & -4\\ -6 & 3 \end{vmatrix}$; б) D = $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 1\\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix}$; в) D = $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -2 & 2\\ -2 & -1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$
4	1) а) D = $\begin{vmatrix} 3{,}8 & -4{,}1\\ -7 & 6 \end{vmatrix}$; б) D = $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3\\ -2 & 0 & -2\\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$;в) D = $\begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 & 1\\ 0 & -2 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 0 & -3\\ 4 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

5	1) а) $D = \begin{vmatrix} 4{,}9 & -3 \\ 1{,}7 & -6 \end{vmatrix}$; б) $D = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; в) $D = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$
6	а) $D = \begin{vmatrix} 4{,}7 & -8 \\ 3{,}2 & -6 \end{vmatrix}$; б) $D = \begin{vmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix}$; в) $D = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$
7	1) а) $D = \begin{vmatrix} 7 & -3{,}4 \\ 6 & -4{,}2 \end{vmatrix}$; б) $D = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$; в) $D = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$
8	1) а) $D = \begin{vmatrix} 8{,}3 & -6 \\ 2{,}7 & -4 \end{vmatrix}$; б) $D = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$; в) $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & -2 & 4 \end{vmatrix}$
9	1) а) $D = \begin{vmatrix} 4{,}8 & -7 \\ 2{,}4 & -3 \end{vmatrix}$; б) $D = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$; в) $D = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}$
10	1) а) $D = \begin{vmatrix} 8 & -4{,}6 \\ 9 & -2{,}9 \end{vmatrix}$; б) $D = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$; в) $D = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

Литература:

1.Баврин, И. И. Математика: учебник и практикум для среднего профессионального образования / И. И. Баврин. — 2-е изд., перераб. И доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 616 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-04101-9. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://biblio-online.ru/bcode/426511.

2.Дадаян, А. А. Математика : учебник / А.А. Дадаян. — 3-е изд., испр. и доп. — Москва : ИНФРА-М, 2020. — 544 с. — (Среднее профессиональное образование). - ISBN 978-5-16-012592-3. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1097484

Тема: Решение систем линейных алгебраических уравнений

Цель: закрепить навыки по решению систем методом Крамера и методом Гаусса.

Самостоятельная работа: составление плана решения систем линейных уравнений с помощью формул Крамера, методом Гауса, матричным способом, оформление плана на отдельном листе с решением индивидуальной системы

Форма контроля: проверка работы

Виды заданий:

1. Составить план решения систем тремя способами

2. Решить систему методом Крамера
3. Решить систему методом Гаусса

Пример выполнения работы:

1. Решить систему линейных алгебраических уравнений методом Крамера

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_2 \\ \dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

x_1 , x_2 , …, x_n – неизвестные,

b_1, b_2, …., b_n - столбец свободных членов.

Составим главный определитель системы из коэффициентов при неизвестных

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Составим вспомогательные определители системы следующим образом:

$$Dx_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ b_n & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$Dx_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \dots \quad Dx_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

Тогда решением системы является:

$$x_1 = \frac{Dx_1}{D}, \quad x_2 = \frac{Dx_2}{D}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{Dx_n}{D}$$

Отметим следующее:

1. Если определитель системы $D \neq 0$, то система определена, т.е. имеет единственное решение
2. Если $D = Dx_1 = Dx_2 = \dots = Dx_n = 0$, то система имеет бесконечно много решений, т.е. является неопределенной.
3. Если $D = 0$, но хотя бы один из $Dx_1, Dx_2, \dots, Dx_n$ не равен нулю, то система несовместна, т.е. не имеет решений.

Из – за арифметических трудностей формулы Крамера на практике используются для систем не выше третьего, четвертого порядка.

<u>Пример:</u> Решить по формулам Крамера систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \end{cases}$$

x – y = 0

Вычислим все определители:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 0 = -1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1$$

Отсюда $x = \frac{D_x}{D} = \frac{-1}{-5} = \frac{1}{5}$

$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-1}{-5} = \frac{1}{5}$

Ответ: $x = \frac{1}{5}$, $y = \frac{1}{5}$

<u>Пример:</u> Решить по формулам Крамера систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 = 2 \\ 2x_1 - 3x_3 = 3 \end{cases}$$

Вычислим:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 4 \mathrm{Dx}_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 6$$

$$\mathrm{Dx}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 4 \mathrm{Dx}_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Тогда:

$$x_1 = \frac{6}{4} = \frac{2}{3} x_2 = \frac{4}{4} = 1 x_3 = \frac{0}{4} = 0$$

Ответ: x_1=2/3, x_2=1, x_3=0.

Индивидуальная контрольная работа:

Вариант	Задание
1	а) $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - 3y + 2z = 2 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - 3y - 3z = -10 \\ x + 3y - 3z = 13 \\ x + y - z = 7 \end{cases}$
2	а) $\begin{cases} -x + 3y + 2z = 4 \\ 2x - y + 3z = 6 \\ -2x + 2y - z = 8 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - y + z = -4 \\ x + 2y - 3z = 9 \\ 2x - 2y + 2z = 7 \end{cases}$
3	а) $\begin{cases} 3x - y + 2z = -5 \\ 2x + 2y - 3z = 1 \\ x - 2y + z = 6 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - y + z = -4 \\ x + 2y - z = 11 \\ 2x - 3y + 2z = -2 \end{cases}$
4	а) $\begin{cases} x - 3y + z = -7 \\ 2x + y - 2z = 4 \\ -2x + 2y - 3z = 2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - 3y + z = 9 \\ x - 2y + 2z = -4 \\ 2x + y - 2z = -1 \end{cases}$
5	а) $\begin{cases} x + 3y - z = 8 \\ 2x - y + 4z = -1 \\ -2x + 2y + z = 4 \end{cases}$ б) $\begin{cases} -x + 4y - z = 5 \\ 2x - 2y + 3z = -3 \\ -2x + y + 2z = 2 \end{cases}$
6	а) $\begin{cases} 2x - 2y + 3z = 4 \\ -x + 2y + z = -6 \\ 3x + y - 2z = 12 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - y + z = -3 \\ x + 2y - 4z = 7 \\ 2x + y + 2z = -1 \end{cases}$

7	а) $\begin{cases}3x-y+2z=4\\x-2y+z=-3\\x+3y-z=6\end{cases}$ б) $\begin{cases}2x-y+3z=3\\x-2y+z=8\\3x+2y-z=-1\end{cases}$
8	а) $\begin{cases}4x-y+z=6\\x+2y-2z=-3\\2x+y-3z=2\end{cases}$ б) $\begin{cases}x-y+3z=4\\-2x+2y-z=-7\\3x+y-2z=2\end{cases}$
9	а) $\begin{cases}2x-y+3z=-1\\3x+y-2z=7\\-x+2y+z=4\end{cases}$ б) $\begin{cases}x+2y-z=9\\-2x-3y+z=-5\\3x+y-2z=3\end{cases}$
10	а) $\begin{cases}2x-y+3z=-6\\x+2y-z=8\\3x-2y+2z=2\end{cases}$ б) $\begin{cases}x+2y-z=4\\3x-y+2z=7\\-x+3y-2z=5\end{cases}$

Литература:

1.Баврин, И. И. Математика: учебник и практикум для среднего профессионального образования / И. И. Баврин. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 616 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-04101-9. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://biblio-online.ru/bcode/426511.

2.Дадаян, А. А. Математика : учебник / А.А. Дадаян. — 3-е изд., испр. и доп. — Москва : ИНФРА-М, 2020. — 544 с. — (Среднее профессиональное образование). - ISBN 978-5-16-012592-3. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1097484

Тема: Линейное программирование

Цель: получить представление по теме «Разные случаи решения задач линейного программирования». Закрепить навыки решения задач линейного программирования

Самостоятельная работа: Работа с презентацией. Решение индивидуальных заданий.

Форма контроля: Проверка презентации. Проверка работы.

Виды заданий: 1. Составить презентацию на тему «Моделирование задач линейного программирования», или на тему «Разные случаи решения задач линейного программирования»

Требование к презентациям:

- Презентация не должна быть меньше 10 слайдов.
- Первый лист – это титульный лист, на котором обязательно должны быть представлены: название; наименование колледжа; фамилия, имя, отчество автора;.
- Следующим слайдом должно быть содержание, где представлены основные этапы (моменты) темы презентации. Желательно, чтобы из

содержания по гиперссылке можно перейти на необходимую страницу и вернуться вновь на содержание.

- Дизайн- эргономические требования: сочетаемость цветов, ограниченное количество объектов на слайде, цвет текста.
- Рисунки, фотографии, диаграммы должны быть наглядными и нести смысловую нагрузку, сопровождаться названиями;
- Изображения (в формате jpg) лучше заранее обработать для уменьшения размера файла;
- Размер одного графического объекта – не более 1/2 размера слайда;
- Соотношение текст -картинки – 2/3 (текста меньше чем картинок).
- последними слайдами урока-презентации должны быть глоссарий и